Herbsttagung 2021

der

Mathematischen Gesellschaft in Hamburg
GEGRÜNDET 1690

Geometrie
in
Alltag und Forschung

Freitag den 5. November 2021
Mehrzweckhalle
Friedrich-Ebert-Gymnasium,
Alter Postweg 30-38, 21075 Hamburg-Harburg

Herbsttagung 2021

der

Mathematischen Gesellschaft in Hamburg
GEGRÜNDET 1690

Geometrie in Alltag und Forschung

Freitag den 5. November 2021
Mehrzweckhalle
Friedrich-Ebert-Gymnasium

16.00 – 17.00	Ulrich Eckhardt	*Wie sehen wir und auf welche Weise bringen wir dies den Computern bei?*
17.10 – 18.10	Rolfdieter Frank	*Das 288- Zell, ein schwarzes Schaf im vierdimensionalen Raum*

****

ORT: Friedrich-Ebert-Gymnasium, Alter Postweg 30-38, 21075 Hamburg-Harburg

ANFAHRT: S-Bahn-Station Heimfeld (S3), dann ca. 200 Meter östlich zur Schule, einmal um das Schulgebäude herum zum hinteren Pausenhof.
Wegweiser an der Schule sind vorhanden.

In der Halle ist voraussichtlich Maskenpflicht. Die Halle ist gut belüftet und der nötige Abstand ist gewährleistet.

Eine Anmeldung über E-Mail mathges@math.uni-hamburg.de **ist erforderlich**.
Die Vorträge können auch über ZOOM online verfolgt werden. Den Code bitte über mathges@math.uni-hamburg.de anfordern.

Ulrich Eckhardt

Universität Hamburg

Wie sehen wir und auf welche Weise bringen wir dies den Computern bei?

Unser Wahrnehmungssystem besitzt eine erstaunliche 'eingebaute Geometrie'. Wir können Geraden (Kollinearität), Parallelität, Orthogonalität erkennen, ohne dass diese Fähigkeit erlernt werden muss. Sie ist uns von der Evolution mitgegeben worden. Man muss sich fragen, warum dies so ist. Welches ist der Wettbewerbsvorteil, den unsere baumbewohnenden Vorfahren dadurch gewannen, dass sie 'auf einen Blick' (nach Kant: 'apriori') sofort erkennen konnten, dass ein Bild schief hängt (nach Kant: 'synthetische Erkenntnis')?

Mit unserer Fähigkeit, Geraden zu erkennen hängt zusammen, dass für die Formerkennung anscheinend konvexe Mengen oder konvexe Teile von Mengen eine wichtige Rolle spielen. Es stellt sich die Frage, auf welche Weise das visuelle System diese Leistungen erbringt. Wie werden lineare Strukturen oder konvexe Mengen in unserem Wahrnehmungssystem repräsentiert, um derartige Leistungen aufweisen zu können?

Seit den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts stellen sich derartige Fragen neu. Man versuchte, die Leistungen des menschlichen Wahrnehmungssystems technisch nachzuahmen. Hier stellt sich ebenfalls die Frage, wie man Geometrie auf einer diskreten Struktur repräsentieren sollte. Bekanntlich vermögen heute handelsübliche Scanner, Texte zu 'lesen', man kann technische Pläne automatisch auswerten, es ist sogar möglich, automatisch Gesichter zu erkennen.

In den 1960er Jahren hat man für derartige Fragen 'ingenieurmäßige' pragmatische Lösungen gefunden, die denn auch typisch 'praktisch' waren: zweidimensional und auf endliche Mengen beschränkt. Inzwischen scheint es an der Zeit, eine 'richtige' Geometrie für digitale Rechner zu implementieren, die nicht mehr auf endliche ebene Mengen beschränkt ist.

Ein solcher Ansatz soll vorgestellt werden. Ziel wird es sein, zu zeigen, auf welche Weise man derartige Fragestellungen 'professionell' mathematisch behandeln kann. Dabei werden sich einige interessante mathematische Probleme ergeben.

Rolfdieter Frank

Universität Koblenz-Landau

Das 288- Zell, ein schwarzes Schaf im vierdimensionalen Raum

Ein Oktaeder hat 24 Drehsymmetrien. Beschreibt man diese Drehungen, wie in der Computergrafik $\mathbb{R}$üblich, durch Quaternionen vom Betrag 1, so erhält man 48 Quaternionen, denn q und –q beschreiben dieselbe Drehung. Diese 48 Quaternionen bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die “binäre Oktaedergruppe“. Geometrisch kann man sie als 48 Punkte im $\mathbb{R}^4$ deuten. Deren konvexe Hülle ist ein Polytop, dessen 288 Zellen kongruente nicht regelmäßige Tetraeder sind. Geht man dagegen von Drehsymmetrien eines Quaders, eines Tetraeders oder eines Ikosaeders aus, so erhält man jeweils ein regelmäßiges Polytop. Das 288-Zell ist also das „schwarze Schaf“ unter diesen 4 Polytopen.

In Wikipedia findet man viele Eigenschaften des 288-Zells, allerdings ohne Begründung und mit einer falschen Projektion. Im Vortrag zeige ich, wie man diese Eigenschaften im Zusammenhang von Algebra, Geometrie, Gruppentheorie und Kombinatorik einfach herleiten kann, und wie die Projektion zu korrigieren ist. Dual zum 288-Zell ist das archimedische Polytop, dessen 48 Zellen kongruente Würfelstümpfe sind. Für beide Polytope findet man Eckenkoordinaten im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Vertauscht man überall $\sqrt{2}$ mit - $\sqrt{2}$, so erhält man die zugehörigen Sternpolytope. Dies ist eine schöne Anwendung der aus den Grundlagen der Geometrie bekannten semilinearen Abbildungen.